Теорема Гротендика о предкомпактности подмножеств пространств функций над псевдокомпактными пространствами

Е. А. Резниченко

Аннотация

Рассматриваются обобщения теорем Эберлейна и Гротендика о предкомпактности функциональных пространств: если X — счетно компактное пространство и $C_p(X)$ — пространство непрерывных функций в топологии поточечной сходимости, то любое счетно компактное подпространство пространства $C_p(X)$ предкомпактно, то есть имеет компактное замыкание. В работе представлен обзор результатов по этой теме. Доказано, что если псевдокомпактное X содержит плотное линделёфово Σ-пространство, то псевдокомпактные подпространства пространства $C_p(X)$ предкомпактны. Если X является произведением полных по Чеху пространств, то ограниченные подмножества пространства $C_p(X)$ предкомпактны. Также получены результаты о непрерывности раздельно непрерывных функций.

1 Введение

Пусть X — тихоновское пространство и $C_p(X)$ — пространство непрерывных функций на X в топологии поточечной сходимости. В [12] Эберлейн доказал теорему (часть теоремы Эберлейна–Шмуляна), которое эквивалентно утверждению: для компактных X любое относительно счетно компактное подмножество пространства $C_p(X)$ предкомпактно. Гротендик [13] показал, что этот результат остается верным для счетно компактного X. В дальнейшем эти результаты обобщались в разных направлениях [21, 20, 19, 32, 6, 33, 34, 2, 10, 1].

Пусть X — пространство и $Y \subset X$. Будем говорить, что

($\mathcal{R}_k$) Y предкомпактно (также говорят: Y относительно компактно) в X, если $\overline{Y}$ компактно;

($\mathcal{R}_{cc}$) Y относительно счетно компактно в X, если любая последовательность $(x_n)_{n\in\omega} \subset Y$ имеет предельную точку в X;

($\mathcal{R}_{pc}$) Y относительно псевдокомпактно в X, если существует псевдокомпактное Z, такое, что $Y \subset Z \subset X$;

($\mathcal{R}_b$) Y ограничено в X, если любая непрерывная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ ограничена на Y.

Пространство X назовем μ_{cc}-полным (μ_{pc}-полным, μ_b-полным) пространством, если для каждого $Y \subset X$ выполняется условие: если Y относительно счетно компактно (относительно псевдокомпактно, ограничено) в X, то Y предкомпактно в X. Пространство X назовем $\mu^\#_{cc}$-полным ($\mu^\#_{pc}$-полным, $\mu^\#_b$-полным) пространством, если $C_p(X)$ является μ_{cc}-полным (μ_{pc}-полным, μ_b-полным).

Ниже мы формулируем наиболее важные обобщения теорем Эберлейна и Гротендика. Определение перечисленных ниже пространств можно найти в разделе 2. Пространства из левого столбца $\widetilde{\mu}$-полны для $\widetilde{\mu} \in \{\, \mu^\#_{cc}, \mu^\#_{pc}, \mu^\#_b \,\}$, если в соответствующем столбце стоит знак $+$, и есть контрпример, если стоит знак $-$.

N	класс пространств	$\mu^\#_{cc}$	$\mu^\#_{pc}$	$\mu^\#_b$
1	компактные	$+$[1]	$+$	$+$ [6]
2	счетно компактные	$+$[2]	$+$	$+$ [6]
3	счетно пракомпактные	$+$	$+$	$+$ [33]
4	псевдокомпактные	$+$	$-$[3]	$-$
5	σ-компактные	$+$	$+$	$-$[4]
6	содержащие плотное σ-компактное подпространство	$+$[5]	$+$	$-$
7	содержащие плотное σ-пракомпактное подпространство	$+$	$+$ [33]	$-$
8	содержащие плотное σ-ограниченное подпространство	$+$ [14]	$-$	$-$
9	линделёфовы p-пространства	$+$	$+$	$+$ [34]
10	линделёфовы Σ-пространства	$+$ [2]	$-$ [2]	$-$
11	k_σ-окрашенные пространства	$+$	$+$ [33]	$-$
12	p_σ-окрашенные пространства	$+$ [33]	$-$	$-$
13	пространства счетной тесноты	$+$ [20]	$+$	$+$ [6]
14	k-пространства	$+$ [20]	$+$	$+$ [6]

Таблица 1: Обобщения теоремы Гротендика, I.

Псевдокомпактные $\mu^\#_{pc}$-полные пространства будем называть $\mu^\#_{pc}$-псевдокомпактными пространствами. Пространства X и Y образуют пару Гротендика [22], если любой непрерывный образ пространства X в $C_p(Y)$ предкомпактен. Псевдокомпактное пространство X является $\mu^\#_{pc}$-псевдокомпактным, если и только Y и X образуют пару Гротендика для любого псевдокомпактного пространства Y (предложение 5). Пространство X назовем коровинским (или пространством Ко-

[1]Теорема Эберлейна [12].

[2]Теорема Гротендика [13].

[3]Пространство из [29] является примером, как заметил В. В. Ткачук; см. также [26].

[4]См. предложение III.4.18 из [34]; этот результат принадлежит О. Г. Окуневу.

[5]В учебниках по функциональному анализу это утверждение называют теоремой Эберлейна–Гротендика [31].

ровина) [26], если (X, X) — пара Гротендика. Любое $\mu^{\#}_{pc}$-псевдокомпактное пространство является коровинским. В [22, 27, 24, 25, 26] показана роль коровинских пространств в топологической алгебре. Нас в наибольшей степени интересуют $\mu^{\#}_{pc}$-псевдокомпактные пространства.

В разделе 4 получены некоторые классы $\mu^{\#}_{pc}$-псевдокомпактных пространств (теоремы 4, 6 и 7). В следующей теореме собраны результаты из перечисленных утверждений.

Теорема 1. Пусть X — псевдокомпактное пространство, $Y \subset X = \overline{Y}$ и Y удовлетворяет какому-либо из перечисленных ниже условий: (1) является точечно почти q_D-пространством; (2) σ-β-неблагоприятно; (3) является сильно бузиадовским; (4) является $\widetilde{W}$-пространством; (5) имеет счетный π-характер; (6) является линделёфовым Σ-пространством; (7) является непрерывным образом k_σ-окрашенного пространства Z, для которого выполняется одно из условий:

(a) Z ω-устойчиво и $e(Z^n) \le \omega$ для любого $n \in \omega$;

(b) $(\mathrm{MA} + \neg\mathrm{CH})$ $e(Z^n) \le \omega$ для любого $n \in \omega$;

(c) (PFA) $e(Z) \le \omega$.

Тогда любое псевдокомпактное подмножество $C_p(X)$ предкомпактно, то есть X $\mu^{\#}_{pc}$-псевдокомпактно.

Теорема 1(6) (теорема 7) является одним из основных результатов статьи.

В разделе 3 изучаются раздельно непрерывные функции; нас интересует, когда такие функции квазинепрерывны (предложение 4). Отметим теорему 3, которая усиливает теорему Бузиада [9, Theorem 2.3]. В разделе 5 рассматриваются свойства расположения, получен новый широкий подкласс $\mu^{\#}_{cc}$-полных пространств (теорема 8). Решаются задачи из [34, задача III.4.25] и [33, задача 8.9]. В разделе 6 изучается игра Асанова–Величко. Определены широкие подклассы $\mu^{\#}_{cc}$-полных, $\mu^{\#}_{pc}$-полных и $\mu^{\#}_{b}$-полных пространств (теоремы 9, 10 и 11). Доказано, что произведение полных по Чеху пространств $\mu^{\#}_{b}$-полно (предложение 25). Дополним таблицу 1 новыми результатами из этой статьи.

N	класс пространств	$\mu^{\#}_{cc}$	$\mu^{\#}_{pc}$	$\mu^{\#}_{b}$
15	b_σ-окрашенные пространства	$+$	$-$	$-$
16	w_b-q_f-пространства	$+$	$-$	$-$
17	w_c-q_f-пространства	$+$	$+$	$-$
18	w_s-q_f-пространства	$+$	$+$	$+$
19	почти q_D-пространства	$+$	$+$	$+$
20	произведение полных по Чеху пространств	$+$	$+$	$+$

Таблица 2: Обобщения теоремы Гротендика, II.

2 Определения и обозначения

Далее под пространствами подразумеваются тихоновские топологические пространства. Для множества X через $\mathcal{P}(X)$ или 2^X будем обозначать множество всех подмножеств множества X.

Первый счетный ординал обозначается ω — это множество всех натуральных чисел вместе с 0; $\mathbb{N} = \omega \setminus \{ 0 \}$ — множество положительных натуральных чисел. Целое не отрицательное число $n \in \omega$ также является ординалом: $n = \{ 0, 1, \ldots, n-1 \}$.

Терминология и обозначения соответствуют книгам [35, 34, 15].

2.1 Свойства типа компактности

Пространство X называется счетно компактным, если любая последовательность $(x_n)_{n\in\omega} \subset X$ имеет предельную точку в X. Пространство X называется счетно пракомпактным, если существует плотное подпространство $Y \subset X = \overline{X}$, относительно счетно компактное в X. Пространство X называется псевдокомпактным, если любая непрерывная функция на X ограничена.

Пространство X называется σ-компактным (σ-счетно компактным, σ-счетно пракомпактным, σ-счетно псевдокомпактным), если $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$, где каждое X_n компактно (счетно компактно, счетно пракомпактно, псевдокомпактно). Подмножество $Y \subset X$ называется σ-ограниченным, если $Y = \bigcup_{n\in\omega} Y_n$, где каждое Y_n ограничено в X. Пространство X называется слабо счетно пракомпактным, если оно содержит плотное σ-счетно пракомпактное подпространство.

Пространство X является линделёфовым p-пространством, если X замкнуто вкладывается в произведение компакта и сепарабельного метризуемого пространства. Пространство X является линделёфовым Σ-пространством, если X является непрерывным образом линделёфова p-пространства. Такие пространства также называются счетно определяемыми (countably determined).

2.2 Семейства подпространств, порождающие топологию

Пусть X — пространство, $\mathcal{M}$ — семейство подпространств пространства X и $\bigcup \mathcal{M} = X$. Будем говорить, что семейство $\mathcal{M}$

($\mathcal{G}_t$) определяет топологию X, если выполняется условие: $F \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда $F \cap M$ замкнуто в M для каждого $M \in \mathcal{M}$;

($\mathcal{G}_f$) функционально порождает X, если выполняется условие: функция $f \in \mathbb{R}^X$ непрерывна тогда и только тогда, когда $f|_M \in C_p(X|M)$ для любого $M \in \mathcal{M}$;

($\mathcal{G}_{sf}$) сильно функционально порождает X, если выполняется условие: функция $f \in \mathbb{R}^X$ непрерывна тогда и только тогда, когда $f|_M \in C_p(M)$ для любого $M \in \mathcal{M}$.

Отметим, что $(\mathcal{G}_t) \Rightarrow (\mathcal{G}_{sf}) \Rightarrow (\mathcal{G}_f)$.

Пространство X имеет счетную тесноту (является k-пространством, является секвенциальным пространством), если семейство всех счетных (компактных, метризуемых компактных) подпространств пространства X определяет топологию X. Пространство X имеет слабую функциональную счетную тесноту (является $k_{\mathbb{R}}$-пространством), если семейство всех его счетных (компактных) подпространств функционально порождает пространство X. Слабую функциональную счетную тесноту также называют счетной минитеснотой [4] или счетной $\mathbb{R}$-теснотой [34]. Пространство X имеет функциональную счетную тесноту, если семейство всех его счетных подпространств сильно функционально порождает X.

Обозначим через $\mathcal{P}_s(X)$ семейство всех сепарабельных подмножеств пространства X, через $\mathcal{P}_c(X)$ — семейство всех слабо счетно пракомпактных подмножеств X, через $\mathcal{P}_p(X)$ — семейство всех подмножеств X, в которых плотно некоторое σ-псевдокомпактное подмножество, и через $\mathcal{P}_b(X)$ — семейство всех подмножеств X, в которых плотно некоторое σ-ограниченное подмножество.

Пространство X функционально порождается семейством $\mathcal{P}_s(X)$, если и только если слабая функциональная теснота пространства X счетна. Пространство X называется k_σ-окрашенным (k_σ-flavoured) [2], если оно функционально порождается семейством $\mathcal{P}_c(X)$. Пространство X назовем b_σ-окрашенным, если оно функционально порождается семейством $\mathcal{P}_b(X)$. В [33, Определение 8.8] такие пространства назывались $b\sigma$-пространствами. Пространство X назовем p_σ-окрашенным, если оно функционально порождается семейством $\mathcal{P}_p(X)$.

2.3 Кардинальные инварианты

Пусть $(X, \mathcal{T})$ — пространство. Число Линделёфа $l(X)$ и экстент $e(X)$ пространства X определяются так:

$$\begin{aligned} l(X) = \min\{\tau\ &: \text{для любого открытого покрытия } \gamma \text{ пространства } X \\ &\quad \text{существует подпокрытие } \mu \subset \gamma, \text{ такое, что } |\mu| \leq \tau\} \\ e(X) = \min\{\tau\ &: \text{если } D \subset X \text{ — дискретное замкнутое подмножество,} \\ &\quad \text{то } |D| \leq \tau\}. \end{aligned}$$

2.4 Пространства функций в топологии поточечной сходимости

Пусть X — пространство. Через $C(X)$ обозначается множество всех непрерывных функций на X, а через $\mathbb{R}^X$ — множество всех функций на X с топологией тихоновского произведения. Пространство непрерывных функций на X с топологией поточечной сходимости обозначим через $C_p(X)$; эта топология индуцируется вложением $C_p(X) \subset \mathbb{R}^X$. Для $Y \subset X$ положим

$$\pi^X_Y : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^Y,\ f \mapsto f|_Y, \qquad C_p(X|Y) = \pi^X_Y(C_p(X)).$$

Отображение π^X_Y называется отображением ограничения или проекцией функциональных пространств; $C_p(X|Y) \subset C_p(Y)$ — это пространство непрерывных функций на Y, которые продолжаются до непрерывных функций на X. Для отображения множеств $\varphi\colon X \to Y$ отображение

$$\varphi^{\#}\colon \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}^X,\ f \mapsto f \circ \varphi,$$

называется встречным отображением к отображению φ. Если φ непрерывно, то

$$\varphi^{\#}(C_p(f(X)|Y)) \subset C_p(X)$$

и отображение $\varphi^{\#}$ вкладывает $C_p(f(X)|Y)$ в $C_p(X)$. Непрерывное отображение φ называется $\mathbb{R}$-факторным, если φ сюрьективно и выполняется условие: функция $f \in \mathbb{R}^Y$ непрерывна тогда и только тогда, когда функция $f \circ \varphi$ непрерывна. Сюрьективное непрерывное отображение φ $\mathbb{R}$-факторно, если и только если $\varphi^{\#}(C_p(Y))$ замкнуто в $C_p(X)$ [34].

Если $Y \subset C_p(X)$, то диагональное произведение

$$\Delta(Y)\colon X \to C_p(C_p(X)|Y) \subset C_p(Y),\ \Delta(Y)(x)(f) = f(x)$$

непрерывно [34, предложение 0.5.1] и отображение

$$\Delta(\Delta(Y)(X))\colon Y \to C_p(\Delta(Y)(X))$$

является топологическим вложением.

Пространство X называется пространством Прейсса–Симона, если для каждого незамкнутого множества $A \subset X$ и каждой точки $x \in \overline{A} \setminus A$ существует последовательность $(U_n)_{n\in\omega}$ открытых в A множеств, которая сходится к x [34]. Ясно, что пространство Прейсса–Симона является пространством Фреше–Урысона. Компакты Эберлейна — это компактные подмножества банаховых пространств в слабой топологии. Компакты Эберлейна характеризуются как компактные подпространства пространства $C_p(X)$ для компактных X. Компакты Эберлейна являются пространствами Прейсса–Симона [19], [34, раздел IV.5]. Компакты Прейсса–Симона характеризуются тем, что их псевдокомпактные подпространства компактны.

2.5 Топологические игры

Топологическая игра — это игра, определение которой зависит от параметров $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$. Среди параметров есть топологическое пространство; будем считать, что первый параметр X_1 — это пространство. Игра определяется правилом ходов игры $R(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ и правилом определения победителя в игре V. Мы рассматриваем игры с двумя игроками; в этой работе это игроки α и β. В топологических играх используются бесконечные счетные последовательные игры. Иногда используются топологические игры несчетной длины.

В зависимости от параметров $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ в соответствии с правилом ходов игры R определяется

(M) множество всех допустимых ходов M. Множество

$$M^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} M_n$$

является множеством возможных частичных партий игры. Кроме того, определены

(Φ) $\Phi\colon M^{<\omega} \to 2^M$ — функция определения допустимых ходов для следующего хода и

(p) $p\colon \omega \to P = \{\,\alpha, \beta\,\}$ — функция определения очередности хода: n-й ход делает игрок $p(n)$.

Игроки последовательно делают ходы, на n-м ходу игрок $\theta = p(n) \in \{\,\alpha, \beta\,\}$, чья очередь ходить, делает ход и выбирает некоторый объект $x_n \in \Phi(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. После счетного числа ходов получаем партию $(x_n)_{n\in\omega}$. В соответствии с правилом V определения победителя в игре по партии $(x_n)_{n\in\omega} \in M^\omega$ определяется победитель.

Стратегия s_θ игрока $\theta \in \{\,\alpha, \beta\,\}$ — это функция

$$s_\theta\colon M^*_\theta = \prod_{n\in p^{-1}(\theta)} M^n \to M,$$

для которой $s_\theta(t) \in \Phi(t)$. Для $n \in p^{-1}(\theta)$, на n-м ходу игрок θ выбирает $x_n = s_\theta(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$.

Стратегия s_θ называется выигрышной, если при любой стратегии другого игрока после розыгрыша получается партия $(x_n)_{n\in\omega}$, которая в соответствии с правилом V определения победителя в игре определяется как выигрышная для θ.

Игру с правилами игры R, правилами V определения победителя и параметрами $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ будем обозначать

$$\Gamma(R(X_1, X_2, \dots, X_m), V).$$

Игру назовем θ-благоприятной, если у игрока θ есть выигрышная стратегия, и θ-неблагоприятной, если у игрока θ нет выигрышной стратегии.

При описании игры игра делится на шаги; в течение одного шага игроки делают свои ходы.

2.6 Разные топологические свойства

Пусть X — пространство и $x \in X$.

Точка x называется точкой счетного характера, если в x есть счетная база окрестностей. Точка x называется точкой счетного π-характера, если в x есть счетная π-база. Семейство $\mathcal{P}$ открытых подмножеств X называется π-базой в x, если для любой окрестности U точки x существует $V \in \mathcal{P}$, для которого $V \subset U$.

Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств называется квазинепрерывным, если $\operatorname{Int} f^{-1}(U)$ плотно в $f^{-1}(U)$ для любого непустого открытого множества $U \subset Y$. Отображение $f\colon X \times Y \to Z$ топологических пространств называется сильно квазинепрерывным в $(x_*, y_*) \in X \times Y$, если для любой окрестности $W \subset Z$ точки $f(x_*, y_*)$ и любой окрестности $U \times V$ точки (x_*, y_*) существуют непустое открытое множество $U' \subset U$ и окрестность $V' \subset V$ точки y_*, такие, что $f(U' \times V') \subset W$. Если f сильно квазинепрерывно во всех точках $X \times Y$, то отображение f называется сильно квазинепрерывным.

Пусть $D \subset X = \overline{D}$. Точка x называется q-точкой (q_D-точкой (относительно D)), если существует последовательность $(U_n)_{n\in\omega}$ окрестностей точки x, такая, что если $x_n \in U_n$ ($x_n \in U_n \cap D$), то последовательность $(x_n)_{n\in\omega}$ накапливается к некоторой точке пространства X.

В [16] была предложена следующая игра. Пусть X — пространство, $x_* \in X$ и $D \subset X = \overline{D}$. Определим правила ходов игры $NP(X, x_*, D)$. Положим $U_{-1} = X$.

n-й ход.	Игрок β выбирает $x_n \in U_{n-1} \cap D$. Игрок α выбирает окрестность U_n точки x_*.

После счетного числа ходов получаем партию:

$$(x_0, U_0, \dots, x_n, U_n, \dots).$$

Определим правило определения победителя:

(SQ) последовательность $(x_n)_{n\in\omega}$ накапливается к некоторой точке.

Точка x_* называется почти q_D-точкой, если игра $\Gamma(NP(X, x_*, D), SQ)$ α-благоприятна. Пространство X называется q-пространством, если любая точка $x \in X$ является q-точкой. Пространство X называется q_D-пространством (почти q_D-пространством), если существует плотное множество $D \subset X = \overline{D}$, такое, что любая точка $x \in X$ является q_D-точкой (почти q_D-точкой) относительно D. Пространство X назовем точечным q_D-пространством (точечным почти q_D-пространством), если для любой точки $x \in X$ существует плотное $D \subset X = \overline{D}$, такое, что точка x является q_D-точкой (почти q_D-точкой) относительно D.

Пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ является почти q_D-пространством, но не содержит q_D-точек [16, Remarks 2].

2.7 Замечание о терминологии

В этой работе мы будем использовать унифицированные названия для изучаемых классов пространств.

В [2, 3, 24, 1, 26] μ_{cc}-, $\mu^\#_{cc}$-, $h\mu_{cc}$-, $h\mu^\#_{cc}$-полные пространства называются, соответственно, g-пространствами, слабо гротендиковскими пространствами, наследственно g-пространствами, гротендиковскими пространствами; μ_{pc}-, $\mu^\#_{pc}$-, $h\mu_{pc}$-, $h\mu^\#_{pc}$-полные пространства называются pc-пространствами, слабо pc-гротендиковскими пространствами, hpc-пространствами, pc-гротендиковскими пространствами; μ_b-, $\mu^\#_b$-, $h\mu_b$-, $h\mu^\#_b$-полные пространства называются og-пространствами, слабо oc-гротендиковскими пространствами, наследственно og-пространствами, oc-гротендиковскими пространствами.

В работах [6, 1] μ_b-полные пространства называются μ-пространствами, а в работе [5] — μ-полными пространствами.

3 Квазинепрерывность раздельно непрерывных функций

Пусть X и Y — пространства и $\Phi\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — раздельно непрерывная функция. Определим отображения

$$\varphi_X\colon X \to C_p(Y),\ \varphi_X(x)(y) = \Phi(x,y),$$
$$\varphi_Y\colon Y \to C_p(X),\ \varphi_Y(y)(x) = \Phi(x,y).$$

Для Φ рассмотрим условия:

(SCF$_1$) существует плотное G_δ-множество $D \subset Y = \overline{D}$, такое, что функция Φ непрерывна в каждой точке $(x,y) \in X \times D$;

(SCF$_2$) функция Φ квазинепрерывна;

(SCF$_3$) замыкание $\varphi_X(X)$ в $C_p(Y)$ компактно;

(SCF$_4$) Φ продолжается до раздельно непрерывной функции на $\beta X \times \beta Y$;

(SCF$_5$) замыкание множества $\varphi_Y(Y)$ в $C_p(X)$ компактно;

(SCF$_6$) существует плотное G_δ-множество $E \subset X = \overline{E}$, такое, что функция Φ непрерывна в каждой точке $(x,y) \in E \times Y$.

Условие (SCF$_6$) для функции Φ называется свойством Намиоки. Если любая раздельно непрерывная функция на произведении $X \times Y$ имеет свойство Намиоки, то говорят, что пара пространств X и Y имеет свойство Намиоки. Между раздельно непрерывными функциями на $X \times Y$ и непрерывными отображениями из X в $C_p(Y)$ существует естественная биекция: $\Phi \mapsto \Phi_X$. Поэтому X и Y образуют пару Гротендика, если и только если для каждой раздельно непрерывной функции Φ на $X \times Y$ выполняется условие (SCF$_3$) .

Если X и Y — псевдокомпактные пространства, то для любой раздельно непрерывной функции Φ условия (SCF$_1$)–(SCF$_6$) эквивалентны [24, Theorem 1]. Следовательно, выполняется следующие утверждение.

Теорема 2. Пусть X и Y — псевдокомпактные пространства. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) для X и Y выполняется свойство Намиоки;

(2) для Y и X выполняется свойство Намиоки;

(3) (X, Y) — пара Гротендика;

(4) (Y, X) — пара Гротендика;

(5) для любой раздельно непрерывной функции $\Phi\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ выполняется любое из эквивалентных условий:

   (a) функция Φ квазинепрерывна;

(b) Φ продолжается до раздельно непрерывной функции на $\beta X \times \beta Y$.

Предложение 1. Пусть X и Y — пространства и $\Phi\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ раздельно непрерывная функция. Если выполняется какое-либо из перечисленных ниже условий, то $\mathcal{F}$ — квазинепрерывная функция:

(1) условие Намиоки (SCF_1);

(2) существует плотное подмножество $D \subset Y = \overline{D}$, такое, что выполняется какое-либо из перечисленных ниже условий:

  (a) функция $\Phi|_{X \times D}$ квазинепрерывна;

  (b) функция Φ квазинепрерывна в точках $X \times D$;

  (c) функция Φ сильно квазинепрерывна в точках $X \times D$;

  (d) для $y \in D$ множество $\{ x \in X : \Phi$ непрерывна в точке $(x, y) \}$ плотно в X;

  (e) функция Φ непрерывна в точках множества $X \times D$.

Доказательство. Очевидно, (1) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (d) и (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a). Из (a) вытекает квазинепрерывность функции Φ [24, Proposition 3].

Проверим, что (d) $\Rightarrow$ (c). Пусть $(x, y) \in X \times D$, $U \times V$ — окрестность точки (x, y) и $O \subset \mathbb{R}$ — открытая окрестность точки $\Phi(x, y)$. Так как множество

$$M = \{ x' \in X : \Phi \text{ непрерывна в точке } (x', y) \}$$

плотно в X и функция Φ раздельно непрерывна, то существует $x' \in U \cap M$, для которого $\Phi(x', y) \in O$. Так как Φ непрерывна в точке (x', y), то существует окрестность $U' \times V'$ точки (x', y), для которой $\Phi(U' \times V') \subset O$ и $U' \times V' \subset U \times V$. $\square$

Ниже мы приводим описание игры Кристенсена–Сен-Раймонда [11, 28] и ее модификации из [7].

Пусть X — пространство. Определим правила ходов игры $Chr(X)$. Играют два игрока, α и β. Положим $W_{-1} = X$.

n-й ход. Игрок β выбирает непустое открытое множество $V_n \subset U_{n-1}$. Игрок α выбирает непустое открытое множество $U_n \subset V_n$ и $x_n \in X$.

После счетного числа ходов получаем партию:

$$(V_0, U_0, x_0, \ldots, V_n, U_n, x_n, \ldots).$$

Правило определения победителя таково:

(OP_p) игрок α выиграл, если $\bigcap_{n\in\omega} V_n \cap \overline{\{ x_n : n \in \omega \}} \neq \varnothing$;

(OP_f) игрок α выиграл, если множества $\bigcap_{n\in\omega} V_n$ и $\{ x_n : n \in \omega \}$ функционально не отделимы.

Пространство X назовем σ-β-неблагоприятным (σ_f-β-неблагоприятным), если игра $\Gamma(Chr(X), OP_p)$ ($\Gamma(Chr(X), OP_f)$) β-неблагоприятна. В [7] σ_f-β-неблагоприятные пространства называют $\sigma_{C(X)}$-β-неблагоприятными.

Следующая теорема усиливает теорему 2.3 из работы [9].

Теорема 3. Пусть X — σ_f-β-неблагоприятное пространство, Y — пространство и $y_* \in Y$ — почти q_D-точка. Тогда функция Φ сильно квазинепрерывна в любой точке (x_*, y_*) для всех $x_* \in X$.

Доказательство. Пусть $D \subset Y = \overline{D}$ и y_* — почти q_D-точка относительно D. Пусть s является выигрышной стратегией в игре $\mathcal{G} = \Gamma(NP(Y, y_*, D), SQ)$ и

$$W_n = s(y_0, W_0, \dots, y_{n-1}, W_{n-1}, y_n) \tag{1}$$

для партии $(y_n, W_n)_{n\in\omega}$ игры $\mathcal{G}$.

Возьмем $x_* \in X$. Предположим, что функция Φ не сильно квазинепрерывна в (x_*, y_*). Положим $f(x,y) = \Phi(x,y) - \Phi(x, y_*)$ для $(x,y) \in X \times Y$. Тогда функция f раздельно непрерывна, $f(x, y_*) = 0$ для $x \in X$ и f не сильно квазенепрерывна в (x_*, y_*), то есть существуют $\varepsilon > 0$ и окрестность $U_* \times W_*$ точки (x_*, y_*), для которых $U_* \times \{\, y_* \,\} \subset \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus (-3\varepsilon, +3\varepsilon))}$. Положим

$$Q_0 = f^{-1}((-\varepsilon, +\varepsilon)) \text{ и } Q_1 = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus [-2\varepsilon, +2\varepsilon]) \cap (U_* \times W_*).$$

Тогда $X \times \{\, y_* \,\} \subset Q_0$ и $U_* \times \{\, y_* \,\} \subset \overline{Q_1}$. Пусть π есть проекция произведения $X \times Y$ на Y.

Определим стратегию для игрока β в игре $\mathcal{Q} = \Gamma(Chr(X), OP_f)$. Положим $U_{-1} = U_*$, $S_{-1} = W_*$ и $x_{-1} = x_*$.

На n-м шаге мы будем строить (V_n, U_n, x_n) и (y_n, S_n, W_n), где $y_n \in Y$, S_n и W_n — открытые окрестности точки y_*. При этом будет выполняться условие:

($\star$) $y_n \in S_n \cap D \subset \overline{S_n} \subset S_{n-1} \cap W_{n-1}$, $\{\, x_n \,\} \times S_n \subset Q_0$ и $V_n \times \{\, y_n \,\} \subset Q_1$.

n-й ход. Пусть S_n — окрестность точки y_*, такая, что $\overline{S_n} \subset S_{n-1} \cap W_{n-1}$ и $\{\, x_n \,\} \times S_n \subset Q_0$. Множество $S' = \pi(Q_1 \cap (U_{n-1} \times S_n))$ открыто и плотно в S_n. Возьмем $y_n \in Q \cap S' \subset W_n$. Определим W_n формулой (1). Выберем непустое открытое множество $V_n \subset U_{n-1}$ таким образом, что $V_n \times \{\, y_n \,\} \subset Q_1$. Игрок α выбирает непустое открытое множество $U_n \subset V_n$ и точку $x_n \in X$.

Так как игра $\mathcal{Q}$ β-неблагоприятна, то для некоторой партии $(V_n, U_n, x_n)_{n\in\omega}$ игрок α выигрывает, то есть выполняется условие (OP_f), а это означает, что множество $R = \{\, x_n : n \in \omega \,\}$ функционально неотделимо от $G = \bigcap_{n\in\omega} V_n$.

Так как s — выигрышная стратегия в игре $\mathcal{G}$, то последовательность $(y_n)_{n\in\omega}$ накапливается к некоторой точке $y' \in Y$. Положим $g(x) = f(x, y')$ для $x \in X$. Из ($\star$) вытекает, что $y' \in S_n$, $(x_n, y') \in \{\, x_n \,\} \times S_n \subset Q_0$ и $g(x_n) = f(x_n, y') \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ для $n \in \omega$. Следовательно, $g(R) \subset (-\varepsilon, +\varepsilon)$. Из ($\star$) вытекает, что $G \times \{\, y_n \,\} \subset V_n \times \{\, y_n \,\} \subset Q_1$ и, следовательно, $f(G \times \{\, y_n \,\}) \cap [-2\varepsilon, +2\varepsilon] = \varnothing$ для $n \in \omega$. Так как y' — предельная точка дял последовательности $(y_n)_{n\in\omega}$, то $g(G) \cap (-2\varepsilon, +2\varepsilon) = \varnothing$. Получаем, что функция g функционально отделяет множества R и G. Противоречие. □

В следующем предложении собраны результаты о раздельно непрерывных функциях. Отсутствующие определения можно найти в соответствующих статьях.

Предложение 2. Пусть X и Y — пространства, $y \in Y$ и $\Phi\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — раздельно непрерывная функция.

(1) Если X — сильно бузиадовское (strongly Bouziad) пространство и y — q_D^*-точка (q_D^*-point) для некоторого всюду плотного множества $D \subset Y$, то Φ сильно квазинепрерывно в каждой точке $X \times \{ y \}$ [17, Lemma 4].

(2) Если X содержит всюду плотное $\widetilde{W}$-пространство и Y бэровское, то функция Φ квазинепрерывна [24, Proposition 4].

(3) Если в X всюду плотно множество точек со счетным π-характером и Y бэровское, то функция Φ квазинепрерывна [24, Corollary 1].

Предложение 3. Если пространство X σ-β-неблагоприятно и пространство Y псевдокомпактно, то пара пространств X и Y обладает свойством Намиоки.

Доказательство. Пусть $\Phi\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — раздельно непрерывная функция,

$$\varphi\colon Y \to C_p(X),\ \varphi(x)(y) = \Phi(x, y).$$

Так как отображение φ непрерывно, то $\varphi(Y)$ псевдокомпатно и, следовательно, ограничено в $C_p(X)$. Из теоремы 3.4 работы [30] вытекает, что множество

$$M = \{ x \in X : \varphi(Y) \text{ эквинепрерывно в } x \}$$

имеет тип G_δ и плотно в X. Следовательно, функция Φ непрерывна в точках множества $M \times Y$. $\square$

Из предложений 1, 2, 3 и теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Предложение 4. Пусть $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ — пространства, $X \subset \widetilde{X} = \overline{X}$, $Y \subset \widetilde{Y} = \overline{Y}$ и для пространств X и Y выполняется какое-либо из перечисленных ниже условий:

(1) X σ_f-β-неблагоприятно и является точечно почти q_D-пространством;

(2) X σ-β-неблагоприятно и Y псевдокомпактно;

(3) X сильно бузиадовское и множество q_D^*-точек плотно в Y;

(4) X является $\widetilde{W}$-пространством и Y бэровское;

(5) X имеет счетный π-характер и Y бэровское.

Тогда любая раздельно непрерывная функция $\Phi\colon \widetilde{X} \times \widetilde{Y} \to \mathbb{R}$ квазинепрерывна.

4 $\mu_{pc}^{\#}$-Псевдокомпактные пространства

Пространство X называется pf-пространством, если любое псевдокомпактное пространство $Y \subset X$ содержит точку счетного характера [24]. Назовем пространство X $pf^{\#}$-пространством, если $C_p(X)$ является pf-пространством.

Предложение 5 ([24, Theorem 3]). Псевдокомпактное пространство X является $\mu_{pc}^{\#}$-псевдокомпактным, если и только если выполняется одно из эквивалентных условий:

(1) X является $pf^{\#}$-пространством;

(2) для любого псевдокомпактного пространства $Y \subset C_p(X)$ выполняется одно из эквивалентных условий:

  (a) $\overline{Y}$ — компакт Эберлейна;

  (b) Y $\mu_{pc}^{\#}$-псевдокомпактно;

  (c) множество $\{ f \in Y$: ограничение топологий поточечной и равномерной сходимости совпадают в точке $f \}$ плотно в Y;

  (d) множество $\{ f \in Y \ : \ f$ — точка счетного характера в $Y \}$ плотно в Y;

  (e) множество $\{ f \in Y \ : \ f$ — точка счетного π-характера в $Y \}$ плотно в Y;

(3) для любого псевдокомпактного пространства Y выполняется одно из эквивалентных условий:

  (a) (X, Y) — пара Гротендика;

  (b) (Y, X) — пара Гротендика;

  (c) для X и Y выполняется условие Намиоки;

  (d) для Y и X выполняется условие Намиоки.

Из предложений 4 и 5 и теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть X — псевдокомпактное пространство, $Y \subset X = \overline{Y}$ и выполняется какое-либо из перечисленных ниже условий:

(1) Y является точечно почти q_D-пространством;

(2) Y σ-β-неблагоприятно;

(3) Y является сильно бузиадовским пространством;

(4) Y является $\widetilde{W}$-пространством;

(5) Y имеет счетный π-характер.

Тогда X $\mu_{pc}^{\#}$-псевдокомпактно.

Доказательство. Поскольку псевдокомпактное пространство σ_f-β-неблагоприятно [7], теорема вытекает из предложений 4 и 5 и теоремы 2. $\square$

Пространство X назовем cf-пространством, если любое компактное пространство $Y \subset X$ содержит точку счетного характера. Назовем пространство X $cf^{\#}$-пространством, если $C_p(X)$ является cf-пространством.

Следующее утверждение широко известно.

Предложение 6. Пусть X — псевдокомпактное пространство и $x \in X$. Точка x является точкой счетного характера в X, если и только если x — точка типа G_δ.

Доказательство. Пусть $(U_n)_{n\in\omega}$ — последовательность открытых подмножеств X, для которой $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \{\, x\,\}$. Существует последовательность $(V_n)_{n\in\omega}$ открытых подмножеств X, удовлетворяющая условию

$$x \in V_{n+1} \subset \overline{V_{n+1}} \subset V_n \subset U_n$$

для $n \in \omega$. Покажем, что $(V_n)_{n\in\omega}$ — база окрестностей точки x. Пусть $U \subset X$ — открытая окрестность точки x. Покажем, что $V_n \subset U$ для некоторого $n \in \omega$. Предположим противное. Существует открытая окрестность V точки x, для которой $\overline{V} \subset U$. Положим $W_n = V_n \setminus \overline{V}$. Тогда $W_n \neq \varnothing$. Так как X псевдокомпактно, то последовательность $(W_n)_{n\in\omega}$ накапливается к некоторой точке $y \in X$. Так как $W_n \subset V_n$, то $y \in \bigcap_{n\in\omega} \overline{V_n} = \{\, x\,\}$, то есть $x = y$. Поскольку $x \in V$ и $W_n \cap V = \varnothing$, получаем противоречие с тем, что $(W_n)_{n\in\omega}$ накапливается к x. $\square$

Из этого предложения вытекает, что пространство X является pf-пространством (cf-пространством), если и только если в каждом псевдокомпактном (компактном) пространстве $P \subset X$ есть точка типа G_δ.

Предложение 7. Пусть X — pf-пространство, Y — пространство и $f\colon Y \to X$ — непрерывное иньективное отображение. Тогда Y является pf-пространством.

Доказательство. Пусть $P \subset Y$ псевдокомпактно. Тогда $\varphi(Y)$ псевдокомпактно, и так как X pf-пространство, то некоторая точка $x \in \varphi(Y)$ является точкой типа G_δ. Значит, $\varphi^{-1}(x)$ — точка типа G_δ в P. $\square$

Предложение 8. Если X — μ_{pc}-полное cf-пространство, то X — pf-пространство.

Доказательство. Пусть $P \subset X$ псевдокомпактно. Тогда $K = \overline{P}$ компактно и некоторая точка $x \in K$ имеет счетную базу $(U_n)_{n\in\omega}$ в K. Положим $V_n = U_n \cap P$ для $n \in \omega$. Последовательность $(V_n)_{n\in\omega}$ имеет единственную предельную точку x в K. Так как P псевдокомпактно, то $x \in P$. $\square$

Предложение 9. Пространство X является $pf^{\#}$-пространством, если выполняется какое-либо условие из перечисленных ниже:

(1) X является непрерывным образом $pf^{\#}$-пространства;

(2) в X есть всюду плотное $pf^{\#}$-пространство;

(3) X является $\mu^{\#}_{pc}$-полным $cf^{\#}$-пространством.

Доказательство. (1) Пусть $\varphi\colon Y \to X$ — непрерывное сюрьективное отображение и Y — $pf^{\#}$-пространство. Тогда $\varphi^{\#}(C_p(X)) \subset C_p(Y)$ и $C_p(X)$ вкладывается в $C_p(Y)$. Очевидно, подпространство pf-пространства является pf-пространством. Поэтому $C_p(X)$ — pf-пространство.

(2) Пусть $Y \subset X = \overline{Y}$ — $pf^{\#}$-пространство. Отображение $\pi^X_Y : C_p(X) \to C_p(Y)$ инъективно, поэтому из предложения 7 вытекает, что $C_p(X)$ — pf-пространство.

Утверждение относительно условия (3) вытекает из предложения 8. □

Теорема 5. Пусть X — псевдокомпактное пространство и плотное подпространство $Y \subset X = \overline{Y}$ является непрерывным образом $\mu^{\#}_{pc}$-полного $cf^{\#}$-пространства. Тогда X $\mu^{\#}_{pc}$-псевдокомпактно.

Доказательство. Пусть Y является непрерывным образом $\mu^{\#}_{pc}$-полного $cf^{\#}$-пространства Z. Из предложения 9(3) вытекает, что Z — $pf^{\#}$-пространство, из предложения 9(1) вытекает, что Y — $pf^{\#}$-пространство, и из предложения 9(2) вытекает, что X — $pf^{\#}$-пространство. В силу предложения 5(1) пространство X $\mu^{\#}_{pc}$-псевдокомпактно. □

Предложение 10 ([32, Теорема 1], [33, Теорема 3.7′]). В компактном ω-монолитном пространстве счетной тесноты есть точка счетного характера.

Предложение 11. Пространство X является $cf^{\#}$-пространством, если выполняется какое-либо условие из перечисленных ниже:

(1) любое компактное подпространство пространства $C_p(X)$ ω-монолитно и имеет счетную тесноту;

(2) X ω-устойчиво и $e(X^n) \leq \omega$ для любого $n \in \omega$;

(3) (MA + ¬CH) $e(X^n) \leq \omega$ для любого $n \in \omega$;

(4) (PFA) $e(X) \leq \omega$;

(5) X является линделёфовым Σ-пространством;

(6) X является линделёфовым p-пространством.

Доказательство. Утверждение относительно условия (1) вытекает из предложения 10.

Чтобы доказать, что X является $cf^{\#}$-пространством при выполнении любого из условий (2)–(6), достаточно проверить, что каждое из этих условий влечет за собой ω-монолитность и счетность тесноты любого компактного подпространства пространства $C_p(X)$.

Итак, пусть $K \subset C_p(X)$ — компакт. Положим $Z = \Delta(K)(X)$. Тогда $Z \subset C_p(K)$ является непрерывным образом пространства X и отображение $\Delta(Z)\colon K \to C_p(Z)$ вкладывает компакт K в $C_p(Z)$. Так как Z вкладывается в $C_p(K)$ и K —

компакт, то из теоремы Батурова [34, теорема III.6.1], [8, теорема 1] вытекает, что $l(Z^n) \le e(X^n)$ для всех $n \in \omega$.

(2) Так как X ω-устойчиво, то $C_p(X)$ и, следовательно, K ω-монолитно [34, теорема II.6.8]. Так как $l(Z^n) \le e(X^n) \le \omega$ для $n \in \omega$, то, в силу теоремы Архангельского–Пыткеева [34, теорема I.1.1], теснота пространств $C_p(Z)$ и K счетна.

(3) Из теоремы 4.3 работы [2] вытекает, что в предположении $(\mathrm{MA} + \neg\mathrm{CH})$ компакт K ω-монолитен и имеет счетную тесноту.

(4) Так как Z линделёфово и K вкладывается в $C_p(Z)$, то в предположении (PFA) K имеет счетную тесноту [34, теорема IV.11.14]. Согласно [18, Theorem 1.9] в этом предположении компакт K ω-монолитен.

(5) Так как линделёфово Σ-пространство устойчиво [34, теорема I.6.21], то компакт K монолитен. Теснота пространства $C_p(X)$ для линделёфова Σ-пространства X счетна [34, следствие II.16]; следовательно, теснота компакта K счетна.

Утверждение относительно условия (6) вытекает из (5). □

Предложение 12 ([2, Corollary 2.7], [33, теорема 8.1]). Любое k_σ-окрашенное пространство $\mu^\#_{pc}$-полно.

В частности, (локально) сепарабельные пространства, k-пространства, k_R-пространства, секвенциальные пространства и пространства со (слабой функциональной) счетной теснотой $\mu^\#_{pc}$-полны.

Теорема 6. Пусть X — псевдокомпактное пространство и некоторое его плотное подпространство является непрерывным образом k_σ-окрашенного пространства Y, для которого выполняется одно из следующих условий:

(1) Y ω-устойчиво и $e(Y^n) \le \omega$ для любого $n \in \omega$;

(2) $(\mathrm{MA} + \neg\mathrm{CH})$ $e(Y^n) \le \omega$ для любого $n \in \omega$;

(3) (PFA) $e(Y) \le \omega$.

Тогда X $\mu^\#_{pc}$-псевдокомпактно.

Доказательство. Из предложения 11 вытекает, что Y — $cf^\#$-пространство, и из предложения 12 вытекает, что Y — $\mu^\#_{pc}$-полное пространство. По теореме 5 X $\mu^\#_{pc}$-псевдокомпактно. □

Предложение 13. Если пространство X содержит линделёфово Σ-пространство в качестве всюду плотного подпространства, то X является $pf^\#$-пространством.

Доказательство. Пусть $D \subset X = \overline{D}$ — линделёфово Σ-пространство. Тогда D является непрерывным образом некоторого линделёфова p-пространства Y. Пространство Y $\mu^\#_b$-полно [2, Theorem 2.15] и, следовательно, $\mu^\#_{pc}$-полно. Из предложения 11(6) вытекает, что Y — $cf^\#$-пространство. Из предложения 9(3) вытекает, что Y — $pf^\#$-пространство. Из предложения 9(1) вытекает, что D — $pf^\#$-пространство. Наконец, из предложения 9(2) вытекает, что X — $pf^\#$-пространство. □

Теорема 7. Пусть X — псевдокомпактное пространство и X содержит линделёфово Σ-пространство в качестве плотного подпространства. Тогда X $\mu^\#_{pc}$-псевдокомпактно.

Доказательство. Из предложения 13 вытекает, что X — $pf^{\#}$-пространство, и из предложения 5(1) вытекает, что X $\mu^{\#}_{pc}$-псевдокомпактно. □

5 Свойства расположения подмножеств в пространствах

Под свойством расположения мы понимаем такое свойство, которым может обладать подпространство Y по отношению ко всему пространству X. Если такое свойство $\mathcal{R}$ для пары пространств Y и X выполняется, то мы говорим, что Y $\mathcal{R}$-расположено в X. Свойство расположенности $\mathcal{R}$ назовем непрерывно инвариантным, если выполняется условие: если $Y \subset X$ $\mathcal{R}$-расположено в X и $f\colon X \to Z$ — непрерывное отображение, то $f(Y)$ $\mathcal{R}$-расположено в Z. Свойство расположения $\mathcal{R}$ назовем свойством типа ограниченности, если оно непрерывно инвариантно и выполняется условие: в пространстве со счетной базой замыкание каждого $\mathcal{R}$-расположенного множества является компактом. Если $\mathcal{R}$ — свойство типа ограниченности, то мы будем говорить <<Y $\mathcal{R}$-ограничено в X>> вместо <<Y $\mathcal{R}$-расположено в X>>.

Четыре свойства типа ограниченности были определены во ведении — $\mathcal{R}_k$, $\mathcal{R}_{cc}$, $\mathcal{R}_{pc}$ и $\mathcal{R}_b$. Пространство X назовем $\mu[\mathcal{R}]$-полным, если $\mathcal{R}(X) \subset \mathcal{R}_k(X)$, то есть $\overline{Y}$ компактно для каждого Y $\mathcal{R}$-расположенного в X подмножества. Пространство X назовем $\mu^{\#}[\mathcal{R}]$-полным, если $C_p(X)$ является $\mu[\mathcal{R}]$-полным. μ_{cc}-Полные, μ_{pc}-полные и μ_b-полные пространства — это $\mu[\mathcal{R}_{cc}]$-полные, $\mu[\mathcal{R}_{pc}]$-полные и $\mu[\mathcal{R}_b]$-полные пространства, соответственно. $\mu^{\#}_{cc}$-Полные, $\mu^{\#}_{pc}$-полные и $\mu^{\#}_b$-полные пространства — это $\mu^{\#}[\mathcal{R}_{cc}]$-полные, $\mu^{\#}[\mathcal{R}_{pc}]$-полные и $\mu^{\#}[\mathcal{R}_b]$-полные пространства, соответственно.

Мы будем называть наследственно $\mu[\mathcal{R}]$-полные пространства $h\mu[\mathcal{R}]$-полными и пространства X, для которых $C_p(X)$ является $h\mu[\mathcal{R}]$-полным пространством, $h\mu^{\#}[\mathcal{R}]$-полными. Соответственно, $h\mu_b$-полные пространства — это $h\mu[\mathcal{R}_b]$-полные пространства, $h\mu^{\#}_b$-полные пространства — это $h\mu^{\#}[\mathcal{R}_b]$-полные пространства и т.п.

Предложение 14 ([34]). Компактные $h\mu^{\#}_{cc}$-полные пространства — это в точности компакты Фреше–Урысона. Компактные $h\mu^{\#}_{pc}$-полные пространства — это в точности компакты Прейсса–Симона.

Пространство X является $h\mu^{\#}_{cc}$-полным, если и только если X является $\mu^{\#}_{cc}$-полным и любое компактное подмножество пространство X является компактом Фреше–Урысона.

Пространство X является $h\mu^{\#}_{pc}$-полным, если и только если X является $\mu^{\#}_{pc}$-полным и любое компактное подмножество пространства X является компактом Прейсса–Симона.

Компакты Эберлейна являются компактами Прейсса–Симона.

Предложение 15. Пусть $\mathcal{R}$ — свойство типа ограниченности, X — пространство, Y $\mathcal{R}$-ограничено в X и $Z \subset C_p(X)$ $\mu^{\#}[\mathcal{R}]$-полно.

(1) Если Z ограничено в $C_p(X)$, то $\overline{\pi^X_Y(Z)}^{C_p(Y|X)}$ — компакт Эберлейна.

(2) Если Z псевдокомпактно, то $\pi^X_Y(Z)$ — компакт Эберлейна.

Доказательство. (1) Пусть $\varphi = \Delta(Z)\colon X \to C_p(Z)$. Положим $X' = C_p(Z)$, $Y' = \varphi(Y)$, $\psi = \Delta(X')$ и $Z' = \psi(Z) \subset C_p(X')$. Положим также $\varphi_Y = \varphi|_Y$. Тогда $\varphi_Y^\#\colon C_p(Y') \to C_p(Y)$ есть топологическое вложение и

$$\varphi_Y^\#(\pi_{Y'}^{X'}(Z')) = \pi_Y^X(Z) \text{ и } \varphi_Y^\#(C_p(Y'|X')) \subset C_p(Y|X).$$

Так как $\mathcal{R}$ непрерывно инвариантно, то Y' $\mathcal{R}$-ограничено в X', и так как Z $\mu^\#[\mathcal{R}]$-полно, то $K = \overline{Y'}$ компактно. Компакты C-вложены в любое объемлющее пространство; следовательно, $C_p(K|X') = C_p(K)$. Поскольку $C_p(K)$ μ_b-полно и $Z'' = \pi_K^{X'}(Z')$ ограничено в $C_p(K)$, $\overline{Z''}$ — компакт Эберлейна. Значит, $T = \pi_{Y'}^K(\overline{Z''})$ — компакт Эберлейна, причем $T \subset C_p(Y'|X')$ и $T = \overline{\pi_{Y'}^{X'}(Z')}$. Следовательно, $\overline{\pi_Y^X(Z)} = \varphi_Y^\#(T) \subset C_p(Y|X)$ — компакт Эберлейна.

(2) Из (1) вытекает, что $K = \overline{S}^{C_p(Y|X)}$ — компакт Эберлейна, где $S = \pi_Y^X(Z)$. Так как S — плотное псевдокомпактное подмножество компакта Эберлейна K и компакты Эберлейна являются компактами Прейсса–Симона, то $K = S$. □

Предложение 16. Пусть X — пространство, P — σ-ограниченное подмножество X, $P \subset Y \subset \overline{P}$ и Z — относительно счетно компактное подмножество пространства $C_p(X)$. Тогда замыкание множества $\pi_Y^X(Z)$ в $C_p(Y|X)$ является компактом Эберлейна.

Доказательство. Пусть $P = \bigcup_{n\in\omega} P_n$, где P_n ограничено в X. Пусть $F = \overline{Z}$. Тогда F счетно пракомпактно и, следовательно, $\mu_b^\#$-полно [33, теорема 2.9]. Из предложения 15(2) вытекает, что $\pi_{P_n}^X(F)$ — компакт Эберлейна. Значит, $K = \overline{F'}^{\mathbb{R}^P}$ является компактом Эберлейна, где $F' = \pi_P^X(F)$. Так как компакты Эберлейна являются компактами Прейсса–Симона, то $K = F' \subset C_p(K|X)$. Отображение $\pi_P^Y\colon C_p(Y|X) \to C_p(K|X)$ является уплотнением, поскольку P плотно в Y. Пространство $Q = \pi_Y^X(F)$ псевдокомпактно и уплотняется на компакт Эберлейна K. Следовательно [34], Q гомеоморфно компакту K и является компактом Эберлейна. Осталось заметить, что Q является замыканием множества $\pi_Y^X(Z)$ в $C_p(Y|X)$. □

Это предложение положительно решает задачу III.4.25 из книги [34].

Предложение 17. Пусть X — пространство, λ — покрытие пространства Y и $Z \subset C_p(X)$. Если выполняется какое-либо из условий, перечисленных ниже, то Z предкомпактно в $C_p(X)$:

(1) λ функционально порождает X и $\pi_Y^X(Z)$ предкомпактно в $C_p(Y|X)$;

(2) λ сильно функционально порождает X и $\pi_Y^X(Z)$ предкомпактно в $C_p(Y)$.

Доказательство. Пусть $K = \overline{Z}^{\mathbb{R}^X}$ и $f \in K$. Множество Z поточечно ограничено, поэтому K — компакт.

(1) $f|_Y \in \pi_Y^X(K) \subset C_p(Y|K)$ для $Y \in \lambda$. Так как λ функционально порождает X, то $f \in C_p(X)$.

(2) $f|_Y \in \pi_Y^X(K) \subset C_p(Y)$ для $Y \in \lambda$. Так как λ сильно функционально порождает X, то $f \in C_p(X)$. □

Теорема 8. b_σ-Окрашенные пространства $\mu^\#_{cc}$-полны.

Доказательство. Пусть X — b_σ-окрашенное пространство и Z относительно счетно компактно в $C_p(X)$. Из предложения 16 вытекает, что $\pi^X_Y(Z)$ предомпактно в $C_p(Y|X)$ для $Y \in \mathcal{P}_b(X)$, и из предложения 17 вытекает, что Z предкомпактно в $C_p(X)$. □

Теорема 8 усиливает теорему 8.3 из [33]: p_σ-окрашенные пространства $\mu^\#_{cc}$-полны. В [33, задача 8.9] была поставлена задача: найти пример не b_σ-окрашенного пространства. Отметим, что недискретное пространство, в котором каждое счетное подмножество C-вложено, не является b_σ-окрашенным пространством, поэтому, например, одноточечная линделёфикация дискретного несчетного пространства не b_σ-окрашена. Теорема 8 позволяет строить другие примеры не b_σ-окрашенных пространств.

Пример 1. Пусть C — какое-нибудь сепарабельное счетно компактное не компактное пространство [35, 23], и пусть $X = C_p(C)$. Пространство X субметризуемо, имеет счетное число Суслина и, так как C замкнуто вкладывается в $C_p(X)$, не является $\mu^\#_{cc}$-полным. Из теоремы 8 вытекает, что X не является b_σ-окрашенным.

6 Слабо q-пространства и игра Асанова–Величко

В [6] с помощью топологической игры определен широкий класс слабо q-пространств, который является подклассом $\mu^\#_b$-полных пространств. В [1] модификация игры Асанова–Величко была использована для изучения предкомпактных подмножеств функциональных пространств. Здесь мы рассматриваем дальнейшую модификацию игры Асанова–Величко.

Пусть X — пространство, $A \subset X$, $x \in \overline{A} \setminus A$ и λ — некоторое покрытие пространства X. Определим правила ходов игры $AV(X, x, A, \lambda)$. Играют два игрока, α и β.

n-й ход. Игрок β выбирает окрестность V_n точки x. Игрок α выбирает $S_n \subset A$ таким образом, что $S_n \subset L$ для некоторого $L \in \lambda$.

После счетного числа ходов получаем партию:

$$(V_0, S_0, \ldots, V_n, S_n, \ldots).$$

Определим правила определения победителя.

(I) Игрок α выиграл, если $\bigcap_{n\in\omega} V_n \cap \overline{\bigcup_{n\in\omega} S_n} \neq \varnothing$.

(I_f) Игрок α выиграл, если существует $S \subset \bigcap_{n\in\omega} V_n$, такое, что $S \subset L$ для некоторого $L \in \lambda$ и множества S и $\bigcup_{n\in\omega} S_n$ функционально неотделимы.

Будем говорить, что

$(W\text{-}q)$ X — W-q-пространство относительно λ, если для всякого незамкнутого $A \subset X$ найдется $x \in \overline{A} \setminus A$, такое, что игра $\Gamma(AV(X, x, A, \lambda), I)$ α-благоприятна;

(w-q) X — w-q-пространство относительно λ, если для всякого незамкнутого $A \subset X$ найдется $x \in \overline{A} \setminus A$, такое, что игра $\Gamma(AV(X, x, A, \lambda), I)$ β-неблагоприятна;

(W-q_f) X W-q_f-пространство относительно λ, если для любой разрывной функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ существуют незамкнутое множество $A \subset X$ и точка $x \in \overline{A} \setminus A$, такие, что $f(x) \notin \overline{f(A)}$ и игра $\Gamma(AV(X, x, A, \lambda), I_f)$ α-благоприятна;

(w-q_f) X w-q_f-пространство относительно λ, если для любой разрывной функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ существуют незамкнутое множество $A \subset X$ и точка $x \in \overline{A} \setminus A$, такие, что $f(x) \notin \overline{f(A)}$ и игра $\Gamma(AV(X, x, A, \lambda), I_f)$ β-неблагоприятна.

Предложение 18. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — разрывная функция. Тогда

(1) существует такое незамкнутое множество $A \subset X$, что $f(x) \notin \overline{f(A)}$ для всех $x \in \overline{A} \setminus A$;

(2) если $D \subset X = \overline{D}$, то существует такое незамкнутое множество $A \subset D$, что $f(x) \notin \overline{f(A)}$ для некоторого $x \in \overline{A} \setminus A$.

Доказательство. (1) Так как f разрывна, то $A = f^{-1}(F)$ не замкнуто для некоторого замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}$. Тогда $f(x) \notin F \supset \overline{f(A)}$ для всех $x \in \overline{A} \setminus A$.

(2) Согласно [33, лемма 2.8] существует $x' \in X$, для которого функция $f|_{D'}$ разрывна на D', где $D' = D \cup \{ x' \}$. Из (1) вытекает, что существует незамкнутое в D' множество $A' \subset D'$, так что $f(x) \notin \overline{f(A')}$ для некоторого $x \in D' \cap \overline{A'} \setminus A'$. Положим $A = A' \cap D = A \setminus \{ x' \}$. Тогда $f(x) \notin \overline{f(A)}$ и $x \in \overline{A} \setminus A$. □

В [6] для $x \in \overline{A} \setminus A$ введено понятие слабо q-точки относительно A, которое совпадает с условием, что игра $\Gamma(AV(X, x, A, \mathcal{P}_s(X)), I)$ α-благоприятна.

Назовем пространство X W_s-q-пространством (w_s-q_f-, W_s-q_f-, w_s-q-пространством), если X является W-q-пространством (соответственно, w-q_f-, W-q_f-, w-q-пространством) относительно $\mathcal{P}_s(X)$. Классы слабо q-пространств и W_s-q-пространств совпадают.

Положим $\mathcal{P}_1(X) = \{ \{ x \} : x \in X \}$. Назовем пространство X W_1-q-пространством (w_1-q_f-, W_1-q_f-, w_1-q-пространством), если X является W-q-пространством (соответственно, w-q_f-, W-q_f-, w-q-пространством) относительно семейства $\mathcal{P}_1(X)$.

Игры $\Gamma(AV(X, x, A, \mathcal{P}_1(X)), I)$ и $\Gamma(AV(X, x, A, \mathcal{P}_s(X)), I_f)$ совпадают. Переформулируем игру $\Gamma(AV(X, x, A, \mathcal{P}_1(X)), I)$.

Пусть X — пространство, $A \subset X$ и $x \in \overline{A} \setminus A$. Определим правила ходов игры $AV_1(X, x, A)$. Играют два игрока, α и β.

n-й ход. Игрок β выбирает окрестность V_n точки x. Игрок α выбирает $x_n \in A$.

После счетного числа ходов получаем партию:

$$(V_0, x_0, \ldots, V_n, x_n, \ldots).$$

Определим правило определения победителя:

(I_1) игрок α выиграл, если $\bigcap_{n\in\omega} V_n \cap \overline{\{ x_n : n \in \omega \}} \neq \varnothing$.

Игра $\Gamma(AV(X,x,A,\mathcal{P}_1(X)),I)$ эквивалентна игре $\Gamma(AV_1(X,x,A),I_1)$.

Предложение 19. Все почти q_D-пространства являются W_1-q_f-пространствами.

Доказательство. Пусть X — почти q_D-пространство и $D \subset X = \overline{D}$ — плотное множество из определения почти q_D-пространства, и пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — разрывная функция. В силу предложения 18(2) существуют $A \subset D$ и $x \in \overline{A} \setminus A$, для которых $f(x) \notin \overline{f(A)}$. Покажем, что игра $\mathcal{G} = \Gamma(AV(X,x,A,I_1)$ α-благоприятна. Пусть s — выигрышная стратегия для игрока α в игре $\mathcal{Q} = \Gamma(NP(X,x,D),SQ)$. Определим выигрышную стратегию для α в игре $\mathcal{G}$. При построении стратегии будем также строить последовательности $(U_n)_{n\in\omega}$ и $(W_n)_{n\in\omega}$ открытых окрестностей точки x. Положим $W_{n-1} = U_{n-1} = X$.

n-й ход. Игрок β выбирает окрестность V_n точки X. Пусть W_n — окрестность точки x, для которой $\overline{W_n} \subset W_{n-1} \cap V_n \cap U_{n-1}$. Возьмем $x_n \in W_n \cap A$. Положим

$$U_n = s(x_0, U_0, \ldots, x_{n-1}, U_{n-1}, x_n).$$

После счетного числа ходов получаем партию $(V_n, x_n)_{n\in\omega}$ игры $\mathcal{G}$, партию $(x_n, U_n)_{n\in\omega}$ игры $\mathcal{Q}$ и последовательность $(W_n)_{n\in\omega}$. Так как стратегия s выигрышная для α в игре $\mathcal{Q}$, то $(x_n)_{n\in\omega}$ накапливается к некоторой точке $x' \in X$, причем $x' \in \bigcap_{n\in\omega} V_n$, поскольку $x_n \in W_n \subset \overline{W_n} \subset W_{n-1} \cap V_n$ для $n \in \omega$. Следовательно, выполняется условие (I_1). $\square$

Предложение 20. Все счетно пракомпактные пространства являются q_D-пространствами.

Доказательство. Пусть D — плотное относительно счетно компактное подпространство пространства X. Положим $U_n = X$ для $n \in \omega$. Если $x_n \in U_n \cap D = D$ для $n \in \omega$, то последовательность $(x_n)_{n\in\omega}$ накапливается к некоторой точке X. $\square$

Пример 2. Обозначим через $\Sigma(0)$ Σ-произведение несчетного числа гомеоморфных копий отрезка $[0,1]$ вокруг нуля, т.е. подпространство пространства $[0,1]^{\omega_1}$, состоящее из всех точек, у которых не более чем счетное число координат отлично от 0. Пусть $L \subset [1/2,1]^{\omega_1}$ — подпространство, гомеоморфное одноточечной линделификации дискретного множества мощности ω_1 с единственной неизолированной точкой l_*. Положим $X = \Sigma \cup L$. Так как Σ плотно в X и счетно компактно, то X счетно пракомпактно. Пусть $A = L \setminus \{ l_* \}$. СледовательноТогда $\overline{\pi^X_Y(Z)} = \varphi^{\#}_Y(T) \subset C_p(Y|X)$ компакт Эберлейн. Тогда игра $\Gamma(AV(X,l_*,A,\mathcal{P}_s(X)),I)$ β-благоприятна: чтобы выиграть, игроку β достаточно выбирать V_n таким образом, чтобы выполнялось условие $V_n \cap S_i = \varnothing$ для $i \leq n$. Следовательно, l_* не является слабо q-точкой относительно A.

Пространство X счетно пракомпактно, но не является слабо q-пространством.

Предложение 21 ([16, Example 1]). Любое произведение полных по Чеху пространств является почти q_D-пространством.

В [6] для $x \in \overline{A} \setminus A$ введено понятие слабо q-точки относительно A, которое совпадает с условием, что игра $\Gamma(AV(X, x, A, \mathcal{P}_s(X)), I)$ α-благоприятна.

Семейство множеств λ называется замкнутым относительно счетных объединений, если $\bigcup \mu \in \lambda$ для любого не более чем счетного подсемейства $\mu \subset \lambda$.

Предложение 22. Пусть X — пространство, $Z \subset C_p(X)$ и λ — замкнутое относительно счетных объединений покрытие пространства X, такое, что для каждого $M \in \lambda$ выполнены условия:

(λ_1) замыкание $S = \overline{Z}^{C_p(X|M)}$, где $Z = \pi^X_M(Y)$, компактно;

(λ_2) $S = \bigcup\{\, \overline{Q} : Q \subset Z,\ |Q| \leq \omega \,\}$.

Предположим, что X при этом является w-q_f-пространством относительно λ. Тогда замыкание множества Y в $C_p(X)$ компактно.

Доказательство. Предположим противное. Обозначим через K замыкание множества Y в $\mathbb{R}^X$. Из того, что покрытие λ замкнуто относительно счетных объединений, вытекает, что Y поточечно ограничено и, следовательно, K — компакт. Пусть $f \in K \setminus C_p(X)$. Поскольку X является w-q_f-пространством относительно λ, вытекает существование незамкнутого множества $A \subset X$ и точки $x \in \overline{A} \setminus A$, для которых $f(x) \notin \overline{f(A)}$ и игра $\mathcal{G} = \Gamma(AV(X, x, A, \lambda), I_f)$ β-неблагоприятна. Возьмем элемент покрытия $L_x \in \lambda$, содержащий точку x. Положим $L_{-1} = \varnothing$ и $V_{-1} = X$. Положим

$$\Omega(h, Q) = \sup\{\, |h(x_1) - h(x_2)| : x_1, x_2 \in Q \,\}$$

для $f \in \mathbb{R}^X$ и $Q \subset X$.

Определим стратегию для β в игре $\mathcal{G}$. На n-м шаге игрок β будет также выбирать последовательность $(f_{n,m})_{m\in\omega} \subset Y$ и элемент покрытия $L_n \in \lambda$.

n-й ход. Так как λ замкнуто относительно счетных объединений, то существует $L_n \in \lambda$, для которого

$$L_x \cup L_{n-1} \cup \bigcup_{i<n} S_i \subset L_n.$$

Из условия (λ_1) вытекает, что $\pi^X_{L_n}(K) \subset C_p(X|L_n)$ — компакт, а из условия (λ_2) вытекает, что

$$f|_{L_n} \in \overline{\{\, f_{n,m} : m \in \omega \,\}}^{C_p(X|L_n)}$$

для некоторого $(f_{n,m})_{m\in\omega} \subset Y$. Возьмем такую окрестность V_n точки x, что $\overline{V_n} \subset V_{n-1}$ и

$$\Omega(f_{i,j}, V_n) < \frac{1}{2^n}$$

для $i, j \leq n$. Игрок α выбирает $S_n \subset A$ таким образом, что $S_n \subset L'$ для некоторого $L' \in \lambda$.

Так как игра $\mathcal{G}$ β-неблагоприятна, то существует партия игры $\mathcal{G}$, в которой игрок β использует описанную стратегию и игрок α выигрывает, то есть выполняется условие (I_f): существует множество

$$S \subset G = \bigcap_{n \in \omega} V_n,$$

такое, что $S \subset L$ для некоторого $L \in \lambda$ и множества S и $\widetilde{S} = \bigcup_{n\in\omega} S_n$ функционально не отделимы.

Положим $\mathcal{F} = \{ f_{n,m} : n, m \in \omega \}$ и $L_* = \bigcup_{n\in\omega} L_n$. Так как $f|_{L_n} \in \overline{\pi^X_{L_n}(\mathcal{F})}$ для $n \in \omega$, то $f|_{L_*} \in \overline{\pi^X_{L_*}(\mathcal{F})}$. Заметим, что $\Omega(f_{i,j}, G) = 0$, поскольку $\Omega(f_{i,j}, V_n) < \frac{1}{2^n}$ для $n \geq \max\{i, j\}$, Возьмем

$$h \in \bigcap \{ \overline{\{ g \in \mathcal{F} : g|_{L_*} \in W \}}^K : W \text{ — окрестность точки } f|_{L_*} \text{ в } \pi^X_{L_*}(K) \}.$$

Тогда $h \in \overline{\mathcal{F}}^K \subset K$ и $h|_{L_*} = f|_{L_*}$. Так как $\Omega(g, G) = 0$ для $g \in \mathcal{F}$, то $\Omega(h, G) = 0$. Из того, что $x \in L_*$, вытекают равенства $h(x) = f(x)$ и $h(G) = \{ f(x) \}$. В силу условия (λ_1) $M = L \cup L_* \in \lambda$; значит, $h|_M \in \pi^X_M(K) \subset C_p(X|M)$. Возьмем $q \in C_p(X)$, для которого $h|_M = q|_M$. Заметим, что $h|_{L_*} = q|_{L_*}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &q(S) \subset q(G) = h(G) = \{ f(x) \}, \\ &q(\widetilde{S}) \subset q(A \cap L_*) = f(A \cap L_*) \subset f(A). \end{aligned}$$

Так как $f(x) \notin \overline{f(A)}$, то непрерывная функция q отделяет S и $\widetilde{S}$ в противоречие с тем, что S и $\widetilde{S}$ функционально не отделимы. $\square$

Из предложения 22 вытекает следующее утверждение.

Предложение 23. Пусть X — пространство, $\mathcal{R}$ — свойство типа ограниченности и λ — замкнутое относительно счетных объединений покрытие пространства X, такое, что для любого $\mathcal{R}$-ограниченного в $C_p(X)$ множества $Y \subset C_p(X)$ и любого $M \in \lambda$ выполнены условия:

(λ_1) замыкание $S = \overline{Z}^{C_p(X|M)}$, где $Z = \pi^X_M(Y)$, компактно;

(λ_2) $S = \bigcup \{ \overline{Q} : Q \subset Z,\ |Q| \leq \omega \}$.

Предположим, что при этом X является w-q_f-пространством относительно λ. Тогда X является $\mu^\#[\mathcal{R}]$-полным пространством.

Предложение 23 является обобщением предложения 3.4 из работы [1].

Назовем пространство X W_b-q-пространством (w_b-q_f-, W_b-q_f-, w_b-q-пространством), если X является W-q-пространством (соответственно w-q_f-, W-q_f-, w-q-пространством) относительно семейства $\mathcal{P}_b(X)$.

Теорема 9. Все w_b-q_f-пространства $\mu^\#_{cc}$-полны.

Доказательство. Пусть X — w_b-q_f-пространство. Семейство $\lambda = \mathcal{P}_b(X)$ является замкнутым относительно счетных объединений покрытием пространства X. Пусть Z — относительно счетно компактное подмножество пространства $C_p(X)$. Из предложения 16 вытекает, что замыкание множества $\pi_Y^X(Z)$ в $C_p(Y|X)$ является компактом Эберлейна для любого $Y \in \lambda$; значит, выполнено условие (λ_1) предложения 23. Так как теснота компактов Эберлейна счетна, то выполняется условие (λ_2) предложения 23. Из предложения 23 вытекает, что X $\mu^\#_{cc}$-полно. $\square$

Из предложения 23 вытекает следующее утверждение.

Предложение 24. Пусть X — пространство, $\mathcal{R}$ — свойство типа ограниченности и λ — замкнутое относительно счетных объединений покрытие пространства X, удовлетворяющее такому условию: если $M \in \lambda$, то M — $h\mu^\#[\mathcal{R}]$-полное пространство и каждое компактное подпространство пространства $C_p(M)$ имеет счетную тесноту. Если X является w-q_f-пространством относительно λ, то X — $\mu^\#[\mathcal{R}]$-полное пространство.

Теорема 10. Все w_s-q_f-пространства $\mu^\#_b$-полны.

Доказательство. Пусть X — w_s-q_f-пространство. Семейство $\lambda = \mathcal{P}_s(X)$ является замкнутым относительно счетных объединений покрытием пространства X. Пусть Z — ограниченное подмножество пространства $C_p(X)$. Пусть $Y \in \mathcal{P}_s(X)$. Так как Y сепарабельно, то $C_p(Y)$ субметризуемо и наследственно μ_b-полно. Следовательно, замыкание множества $\pi_Y^X(Z)$ в $C_p(Y|X)$ является метризуемым компактом. Из предложения 23 вытекает, что X $\mu^\#_b$-полно. $\square$

Предложение 25. Для любого пространства X сформулированные ниже условия (1)–(5) связаны импликациями (1) $\Leftarrow$ (2) $\Leftarrow$ (3) $\Leftarrow$ (4) $\Leftarrow$ (5):

(1) X $\mu^\#_b$-полно;

(2) X является w_s-q_f-пространством;

(3) X является W_1-q_f-пространством;

(4) X является почти q_D-пространством;

(5) X является произведением полных по Чеху пространств.

Доказательство. Импликация (1) $\Leftarrow$ (2) — это теорема 10. Импликация (2) $\Leftarrow$ (3) очевидна. Импликация (3) $\Leftarrow$ (4) — это предложение 19. Импликация (4) $\Leftarrow$ (5) — это предложение 21. $\square$

Назовем пространство X W_c-q-пространством (w_c-q_f-, W_c-q_f-, w_c-q-пространством), если X является W-q-пространством (соответственно w-q_f-, W-q_f-, w-q-пространством) относительно $\mathcal{P}_c(X)$.

Теорема 11. Все w_c-q_f-пространства $\mu^\#_{pc}$-полны.

Доказательство. Пусть X — w_c-q_f-пространство. Семейство $\lambda = \mathcal{P}_c(X)$ представляет собой замкнутое относительно счетных объединений покрытие пространства X. Пусть Z — псевдокомпактное подмножество пространства $C_p(X)$. Из предложения 16 вытекает, что замыкание множества $\pi_Y^X(Z)$ в $C_p(Y|X)$ является компактом Эберлейна для любого $Y \in \lambda$; значит, выполнено условие (λ_1) предложения 23. Так как теснота компактов Эберлейна счетна, то выполнено и условие (λ_2) предложения 23. Из предложения 23 вытекает, что X $\mu^{\#}_{pc}$-полно. □

Список литературы

[1] M. Al'perin and A. V. Osipov. Generalization of the Grothendieck's theorem. Topology and its Applications, 338:108648, 2023.

[2] A. Arhangel'skii. On a theorem of Grothendieck in C_p-theory. Topology and its Applications, 80(1):21–41, 1997. Memory of P.S. Alexandroff.

[3] A. Arhangel'skii. Embeddings in C_p-spaces. Topology and its Applications, 85(1-3):9–33, 1998.

[4] A. V. Arhangel'skii. Functional tightness, Q-spaces and τ-embeddings. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 24(1):105–120, 1983.

[5] A. V. Arhangelskii and M. M. Choban. Completeness type properties of semitopological groups, and the theorems of Montgomery and Ellis. Topology Proc, 37:33–60, 2011.

[6] M. Asanov and N. Velichko. Компактные множества в $C_p(X)$. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 22(2):255–266, 1981.

[7] A. Bareche and A. Bouziad. Some results on separate and joint continuity. Topology and its Applications, 157(2):327–335, 2010.

[8] D. P. Baturov. On subspaces of function spaces. Mosc. Univ. Math. Bull., 42(4):75–78, 1987.

[9] A. Bouziad. The Ellis theorem and continuity in groups. Topology and its Applications, 50(1):73–80, 1993.

[10] M. M. Choban, P. S. Kenderov, and W. B. Moors. Eberlein theorem and norm continuity of pointwise continuous mappings into function spaces. Topology and its Applications, 169:108–119, 2014. Special Issue in Honour of Mitrofan Choban and Stoyan Nedev.

[11] J. P. R. Christensen. Joint continuity of separately continuous functions. Proceedings of the American Mathematical Society, 82(3):455–461, 1981.

[12] W. F. Eberlein. Weak compactness in banach spaces: I. Proceedings of the National Academy of Sciences, 33(3):51–53, 1947.

[13] A. Grothendieck. Criteres de compacite dans les espaces fonctionnels generaux. American Journal of Mathematics, 74:168, 1952.

[14] R. Haydon. Compactness in $C_s(T)$ and Applications. Publications du Département de mathématiques (Lyon), 9(1):105–113, 1972.

[15] K. Kunen and J. Vaughan. Handbook of set-theoretic topology. Elsevier, 1984.

[16] W. B. Moors. Any semitopological group that is homeomorphic to a product of Čech-complete spaces is a topological group. Set-Valued and Variational Analysis, 21(4):627–633, 2013.

[17] W. B. Moors. Semitopological groups, Bouziad spaces and topological groups. Topology and its Applications, 160(15):2038–2048, 2013.

[18] O. Okunev and E. Reznichenko. A note on surlindelöf spaces. Topol. Proc., 31(2):667–675, 2007.

[19] D. Preiss and P. Simon. A weakly pseudocompact subspace of banach space is weakly compact. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 015(4):603–609, 1974.

[20] J. Pryce. A device of R.J. Whitley's applied to pointwise compactness in spaces of continuous functions. Proceedings of the London Mathematical Society, 3(3):532–546, 1971.

[21] V. Pták. On theorem of W.F. Eberlein. Studia Mathematica, 14(2):272–275, 1954.

[22] E. Reznichenko. Extension of functions defined on products of pseudocompact spaces and continuity of the inverse in pseudocompact groups. Topology and its Applications, 59(3):233–244, 1994.

[23] E. Reznichenko. Homogeneous subspaces of products of extremally disconnected spaces. Topology and its Applications, 284:107403, 2020.

[24] E. Reznichenko. Extension of mappings from the product of pseudocompact spaces. Topology and its Applications, 322:108329, 2022.

[25] E. Reznichenko. Functions on products of pseudocompact spaces. Topology and its Applications, 307:107935, 2022.

[26] E. Reznichenko and M. Tkachenko. All countable subsets of pseudocompact quasitopological Korovin groups are closed, discrete and C^*-embedded. Topology and its Applications, 341:108728, 2024.

[27] E. Reznichenko and V. Uspenskij. Pseudocompact Mal'tsev spaces. Topology and its Applications, 86(1):83–104, 1998. Topological Groups.

[28] J. Saint-Raymond. Jeux topologiques et espaces de Namioka. Proceedings of the American Mathematical Society, 87(3):499–504, 1983.

[29] D. Shakhmatov. A pseudocompact Tychonoff space all countable subsets of which are closed and C^*-embedded. Topology and its Applications, 22(2):139–144, 1986.

[30] J. Troallic. Boundedness in $C_p(X, Y)$ and equicontinuity. Topology and its Applications, 108(1):79–89, 2000.

[31] J. Voigt. The Eberlein–Šmulian and Eberlein–Grothendieck Theorems. In A course on topological vector spaces, page 155. Springer, 2020.

[32] А.В. Архангельский. О некоторых топологических пространствах, встречающихся в функциональном анализе. УМН, 31(5):17–32, 1976.

[33] А.В. Архангельский. Пространства функций в топологии поточечной сходимости и компакты. УМН, 39(5(239)):11–50, 1984.

[34] А.В. Архангельский. Топологические пространства функций. МГУ, 1989.

[35] Р. Энгелькинг. Общая топология. М.: Мир, 1986.